Date

2002年　東大数学　文系第2問　理系第2問

(1)

$x^{n+1} = (x^2-x-1)Q_n(x) + a_n x + b_n$ とおける。

x^{n+2} を2通りで表す。

$x^{n+2} = (x^2-x-1)Q_{n+1}(x) + \underline{a_{n+1}}x + \underline{b_{n+1}}$ …①

$x^{n+2} = x \times x^{n+1}$

$= x\{(x^2-x-1)Q_n(x) + a_n x + b_n\}$

$= x(x^2-x-1)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x$

$= x(x^2-x-1)Q_n(x) + a_n(x^2-x-1) + a_n(x+1) + b_n x$

$= (x^2-x-1)\{xQ_n(x) + a_n\} + \underline{(a_n+b_n)}x + \underline{a_n}$

…②

①と②が x についての恒等式として成り立つので

補　この、n次式の余りを数列でおいて、漸化式を作る流れは頻出!!

$a_{n+1} = a_n + b_n$

$b_{n+1} = a_n$

(2)　以下、数学的帰納法により、

漸化式&証明ときたら、帰納法

a_n、b_n が共に正の整数で、互いに素であることを示す

(i)　$x^2 = (x^2-x-1)\times 1 + \underbrace{x}_{a_1} + \underbrace{1}_{b_1}$

なので、

$a_1 = 1$

$b_1 = 1$　よって、a_1 b_1 は共に正の整数で、互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき

a_k、b_k が、共に正の整数で、互いに素であると仮定する。

(iii)　$n=k+1$ のとき

a_{k+1}、b_{k+1} が共に正の整数で、互いに素であることを示す。

簡単なので、先に示す

(1)より

$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = a_k \end{cases}$　で、仮定より、a_k、b_k は共に正の整数なので、

a_{k+1}、b_{k+1} も共に正の整数である。

数学的帰納法の中で、背理法を使う

背理法により、

a_{k+1}、b_{k+1} が互いに素であることを示す。

a_{k+1}、b_{k+1} が1以外に公約数を持つと仮定する。つまり、

公約数といったらコレ、

$\begin{cases} a_{k+1} = Ag \\ b_{k+1} = Bg \end{cases}$ とおける。（A、B、g は、AとBは互いに素で、$g \geqq 2$ となる、整数、）

g は最大公約数

l を最小公倍数とすると、

・$l = ABg$、・$a_{k+1} \times b_{k+1} = gl$

の2本も追加してよい。

(1)より

$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = a_k \end{cases}$

↓ $a_{k+1} = Ag$、$b_{k+1} = Bg$ を代入して整理

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_k = Bg \\ b_k = (A-B)g \end{cases}$

帰納法の仮定

これは、a_k、b_k が互いに素であるという仮定と矛盾する。（g という公約数を持つため）

これは、a_{k+1} と b_{k+1} に1以外の公約数を持つという仮定が間違っていたからである。

背理法の仮定

よって、a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

以上より、$n = 1, 2, 3 \cdots$ で、a_n b_n は共に正の整数で、互いに素である。